VARIABLES Y DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES

VAU I

Introducción

a. El concepto de experimento aleatorio ya ha sido introducido.
En ciertos casos el resultado de un experimento es directamente un número (por ejemplo al medir la estatura de un individuo tomado al azar).
En otros casos el resultado de un experimento no es numérico (por ejemplo al revolear una moneda, donde los resultados posibles son cara y ceca), pero siempre es posible codificar estos resultados en forma numérica (por ejemplo 1 si salió cara y 0 si salió ceca).
En lo sucesivo se tratará únicamente con experimentos cuyo resultado sea numérico, ya sea que el número resultante provenga directamente del experimento o que se trate de una codificación numérica de un resultado no numérico.
Por el momento se tratará exclusivamente casos en los cuales el resultado de un experimento sea un único número.

b. A todo experimento aleatorio de resultado numérico único para el cual se ha definido una distribución de probabilidad puede asociarse una variable tal que asuma el valor del resultado del experimento.
A dicha variable se la llamará **variable aleatoria** (*va* en lo sucesivo).
Sea por ejemplo el experimento consistente en tirar un dado cargado, y que se considere que una distribución de probabilidad adecuada para dicho experimento sea:

$$P(\text{As}) = 1/2 \quad ; \quad P(\text{Dos}) = \ldots = P(\text{Seis}) = 1/10$$

Asociando a este experimento una *va* X, se tendrá que en una realización del mismo X podrá asumir uno cualquiera de los valores 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 teniéndose que:

$$P(X = 1) = 1/2 \quad ; \quad P(X = 2) = \ldots = P(X = 6) = 1/10$$

Evidentemente X podrá asumir distintos valores en distintas realizaciones del experimento.

c. Tener bien en cuenta que una *va* no existe "en el vacío", sino que siempre debe ir asociada a un experimento aleatorio específico para el cual se ha definido una distribución de probabilidad.

d. Las variables aleatorias serán por lo general simbolizadas por letras mayúsculas: X, Y, etc.
Un valor observado de X es el valor que asumió X en una realización del experimento.
Se denotará como $P(X = x)$ a la probabilidad de que la *va* X asuma el valor x en una realización del experimento.
Análogamente, se indicará como $P(x_1 < X \le x_2)$ a la probabilidad de que en la realización del experimento la *va* X asuma cualquier valor del intervalo $]x_1,x_2]$.

VAU II

Universo o espacio muestral

a. Sea un experimento aleatorio para el cual se ha definido una distribución de probabilidad y al cual se ha asociado una *va* X.
Se considerará siempre que en este caso el universo del experimento será:

$$E^X = \{\text{Todos los números reales}\} = \{-\infty < X < \infty\} \qquad \textbf{[1]}$$

Esto no está muy de acuerdo con la definición de universo dada en NP I, donde se dijo que el universo de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del mismo. Así, en caso del tiro de un dado cargado considerado en **b** de VAU I, los únicos valores que puede asumir X son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y no todos los números reales.
La conciliación entre la definición dada en **[1]** y la definición dada en NP I se realiza asignando una probabilidad nula al conjunto de todos los valores que **no** pueden ser asumidos por la variable en la realización del experimento.
Así, en el antedicho caso del tiro de dado, poniendo:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \textbf{[2]}$$

se establecerá que:

$$P(E^{\mathrm{X}} - S) = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

Como ejemplo, como consecuencia de lo indicado en **[3]** resulta que:

$$P(\mathrm{X} = \tfrac{1}{2} \cup \mathrm{X} = \pi \cup 70 < \mathrm{X} \le 90) = 0$$

b. A una distribución de probabilidad definida sobre un universo E^{X} se la designará como $D_{E^{\mathrm{X}}}$.

VAU III

Función de distribución. Definición

Sea X la *va* asociada a un experimento aleatorio para el cual se ha definido una distribución de probabilidad $D_{E^{\mathrm{X}}}$.
Sean los sucesos (subconjuntos de E^{X}) $\{\mathrm{X} \le 1\}$, $\{\mathrm{X} \le -1\}$ y $\{\mathrm{X} \le \pi\}$ (ver figura VAU III.a).

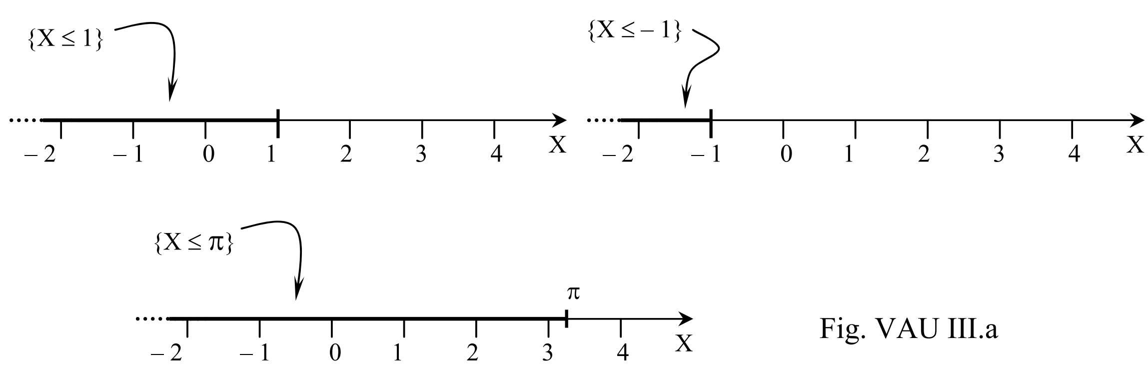

Fig. VAU III.a

Según dicha distribución de probabilidad $D_{E^{\mathrm{X}}}$ efectuada sobre E^{X}, a dichos conjuntos corresponderán probabilidades que serán designadas respectivamente como $P(\mathrm{X} \le 1)$, $P(\mathrm{X} \le -1)$ y $P(\mathrm{X} \le \pi)$.
En general, dado un número real cualquiera x, la distribución $D_{E^{\mathrm{X}}}$ asigna al conjunto $\{\mathrm{X} \le \mathrm{x}\}$ una probabilidad $P(\mathrm{X} \le \mathrm{x})$, que es la probabilidad de que en una realización del experimento la variable X asuma cualquier valor menor o igual que x.

Evidentemente la magnitud de $P(X \leq x)$ está unívocamente definida por el valor x que se haya tomado, y por lo tanto si se considera a x como una variable independiente ordinaria, se tendrá que $P(X \leq x)$ es una función de la misma, lo que se indica como:

$$F^X(x) = P(X \leq x) \qquad \textbf{[1]}$$

$F^X(x)$ es una función de la variable ordinaria x, estando la relación funcional determinada por la distribución $D_E{}^X$. Es por esto que <u>a $F^X(x)$ se la conoce con el nombre de Función de Distribución (F. de D. en lo sucesivo) de la variable aleatoria X</u>.

VAU IV

<u>Propiedades de las F. de D.</u>

a. Dados dos números x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$ (ver figura VAU IV.a) se tiene que:

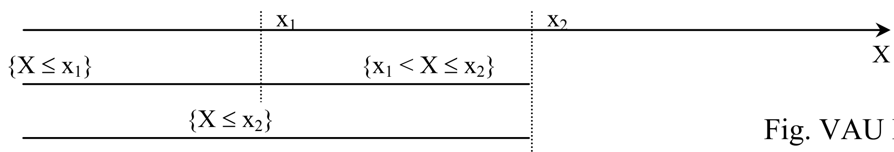

Fig. VAU IV.a

1º. $\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\} = \{X \leq x_2\}$

2º. $\{X \leq x_1\} \cap \{ x_1 < X \leq x_2\} = \varnothing$

y entonces por la condición III indicado en **[1]** de NP V se tiene que:

$$P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2)$$

$$F^X(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) = F^X(x_2)$$

de donde resulta que:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F^X(x_2) - F^X(x_1) \qquad \textbf{[1]}$$

b. Según **[1]** del apéndice A.VAU.I se tiene que:

$$\lim_{h \to 0^+} \{x < X \leq x + h\} = \varnothing \qquad \textbf{[2]}$$

y entonces:

Por **[1]**

$$F^X(x+0) - F^X(x) = [\lim_{h\to 0^+} F^X(x+h)] - F^X(x) = \lim_{h\to 0^+} [F^X(x+h) - F^X(x)] =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} P(x < X \leq x+h) = P[\lim_{h\to 0^+} \{x < X \leq x+h\}] = P(\varnothing) = 0$$

Según Apéndice A.VAU.III　　　　Por **[2]**

Resumiendo:

$$F^X(x + 0) - F^X(x) = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

lo que implica que:

<u>Toda F. de D. es continua por la derecha en todos sus puntos</u>. **[4]**

c. Se tiene que:

$$F^X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F^X(x) = \lim_{x\to-\infty} P(X \le x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ver Apéndice}\\ \text{A.VAU.III}}}{=} P[\lim_{x\to-\infty}\{X \le x\}] \overset{\substack{\text{Según [2] de A.VAU.I}\\ \downarrow}}{=} P(\varnothing) = 0$$

Resumiendo:

$$F^X(-\infty) = 0 \qquad \textbf{[5]}$$

d. Se tiene que:

$$F^X(\infty) = \lim_{x\to\infty} F^X(x) = \lim_{x\to\infty} P(X \le x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ver Apéndice}\\ \text{A.VAU.II}}}{=} P[\lim_{x\to\infty}\{X \le x\}] \overset{\substack{\text{Según [3] de A.VAU.I}\\ \downarrow}}{=} P(E^X) = 1$$

Resumiendo:

$$F^X(\infty) = 1 \qquad \textbf{[6]}$$

e. Se tiene que:

$$F^X(x - 0) = \lim_{h\to0^+} F^X(x - h) = \lim_{h\to0^+} P(X \le x - h) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ver Apéndice}\\ \text{A.VAU.III}}}{=} P[\lim_{h\to0^+}\{X \le x - h\}] \overset{\substack{\text{Según [4] de A.VAU.I}\\ \downarrow}}{=} P(X < x)$$

Resumiendo:

$$F^X(x - 0) = P(X < x) \qquad \textbf{[7]}$$

f. Se tiene que:

1º. $\{X \le x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$

2º. $\{X < x\} \cap \{X = x\} = \varnothing$

y entonces:

$$P(X \le x) = P(X < x) + P(X = x)$$

$$P(X = x) = P(X \le x) - P(X < x)$$

y entonces, por **[7]**:

$$P(X = x) = F^X(x) - F^X(x - 0) \qquad \textbf{[8]}$$

Esto implica lo siguiente:

1º. Para todo valor de x para el cual sea $P(X = x) = 0$, la F. de D. $F^X(x)$ es continua por la izquierda.

2º. Para todo valor de x para el cual sea $P(X = x) \neq 0$, la F. de D. $F^X(x)$ tendrá una discontinuidad por la izquierda de magnitud $P(X = x)$.

g. Se tiene que:

1º. $\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \{x_1 < X \leq x_2\} \cup \{X = x_1\}$

2º. $\{x_1 < X \leq x_2\} \cap \{X = x_1\} = \varnothing$

y entonces:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) + P(X = x_1)$

y entonces, por **[1]** y **[8]**:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F^X(x_2) - F^X(x_1) + F^X(x_1) - F^X(x_1 - 0) = F^X(x_2) - F^X(x_1 - 0)$

Resumiendo:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F^X(x_2) - F^X(x_1 - 0) \qquad \textbf{[9]}$$

h. Se tiene que:

1º. $\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \{x_1 \leq X < x_2\} \cup \{X = x_2\}$

2º. $\{x_1 \leq X < x_2\} \cap \{X = x_2\} = \varnothing$

y entonces:

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) + P(X = x_2)$

y entonces, por **[8]** y **[9]**:

$F^X(x_2) - F^X(x_1 - 0) = P(x_1 \leq X < x_2) + F^X(x_2) - F^X(x_2 - 0)$

Es decir que:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F^X(x_2 - 0) - F^X(x_1 - 0) \qquad \textbf{[10]}$$

i. Se tiene que:

1º. $\{x_1 < X \leq x_2\} = \{x_1 < X < x_2\} \cup \{X = x_2\}$

2º. $\{x_1 < X < x_2\} \cap \{X = x_2\} = \varnothing$

y entonces:

$P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) + P(X = x_2)$

y entonces, por **[1]** y **[8]**:

$F^X(x_2) - F^X(x_1) = P(x_1 < X < x_2) + F^X(x_2) - F^X(x_2 - 0)$

Es decir que:

$$P(x_1 < X < x_2) = F^X(x_2 - 0) - F^X(x_1) \quad \textbf{[11]}$$

j. Se tiene que:

$$\{X > x\} = \{\overline{X \leq x}\}$$

y entonces:

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F^X(x)$

Resumiendo:

$$P(X > x) = 1 - F^X(x) \quad \textbf{[12]}$$

k. Se tiene que:

1º. $\{X \geq x\} = \{X > x\} \cup \{X = x\}$

2º. $\{X > x\} \cap \{X = x\} = \varnothing$

y por lo tanto:

$P(X \geq x) = P(X > x) + P(X = x)$

y entonces, por **[8]** y **[12]**:

$P(X \geq x) = 1 - F^X(x) + F^X(x) - F^X(x - 0) = 1 - F^X(x - 0)$

Resumiendo:

$$P(X \geq x) = 1 - F^X(x - 0) \quad \textbf{[13]}$$

l. En los párrafos anteriores se ha mostrado como una F. de D. asigna probabilidades a cualquier tipo de intervalo (cerrado, abierto, semiabierto, infinito, degenerado, etc).
Por lo tanto, dada una F. de D. es posible hallar la probabilidad correspondiente a cualquier unión, intersección o complementación de una cantidad finita o infinita numerable de dichos intervalos. Por lo tanto:

<u>La definición de una F. de D. $F^X(x)$ correspondiente a una variable X equivale a una asignación completa de probabilidad D_{E^X} sobre todos los intervalos del universo E^X.</u> **[14]**

VAU V

Ejemplos de F. de D.

VAU V.1

a. Sea el experimento consistente en determinar la cantidad de caras que se obtienen al tirar cuatro veces una moneda.

b. En 4 tiros de moneda pueden obtenerse 0, 1, 2, 3 ó 4 caras, y por lo tanto si a la cantidad de caras obtenidas se le asocia la variable X, se tiene que los únicos valores que puede asumir dicha variable son X = 0, X = 1, X = 2, X = 3 y X = 4.
Defínase sobre el universo:

$$E^{X} = \{-\infty < x < \infty\}$$

una distribución de probabilidad tal que:

$$P(X = 0) = 1/16,\ P(X = 1) = 4/16,\ P(X = 2) = 6/16,\ P(X = 3) = 4/16,\ P(X = 4) = 1/16$$

c. Sea un número x menor que 0. Como según la distribución considerada X no puede asumir ningún valor menor o igual que dicho x se tiene que:

$$F^{X}(x) = P(X \le x) = 0 \qquad \text{para } x < 0$$

d. Sea un x perteneciente al intervalo $0 \le x < 1$. Como según la distribución considerada el único valor menor o igual que dicho x que puede asumir X es X = 0 se tiene que:

$$F^{X}(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = 1/16 \qquad \text{para } 0 \le x < 1$$

e. Sea un x perteneciente al intervalo $1 \le x < 2$. Como según la distribución considerada los únicos valores menores o iguales que dicho x que puede asumir X son X = 0 y X = 1 se tiene que:

$$F^{X}(x) = P(X \le x) = P[(X = 0) \cup (X = 1)] = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/16 + 4/16 = 5/16$$

Es decir que:

$$F^{X}(x) = 5/16 \qquad \text{para } 1 \le x < 2$$

f. Continuando de la misma manera se obtiene que:

$$F^{X}(x) = \begin{cases} 1/16 + 4/16 + 6/16 = 11/16 & \text{para } 2 \le x < 3 \\ 1/16 + 4/16 + 6/16 + 4/16 = 15/16 & \text{para } 3 \le x < 4 \\ 1/16 + 4/16 + 6/16 + 4/16 + 1/16 = 1 & \text{para } x \ge 4 \end{cases}$$

g. De todo lo antedicho surge la F. de D. graficada en la figura VAU V.a

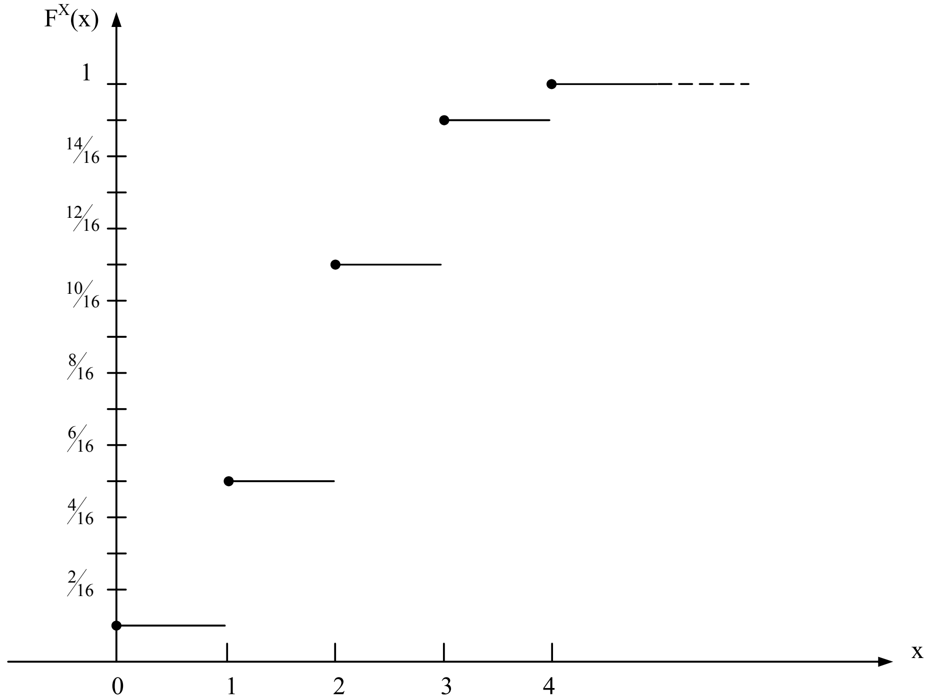

Fig. VAU V.a

VAU V.2

a. Sea el experimento consistente en determinar el punto en que se detiene el segundero de un reloj cuya esfera tenga 1 m de circunferencia y cuyo resto de cuerda sea desconocido.

b. Asóciese a este experimento una variable aleatoria X correspondiente a la longitud del arco de circunferencia comprendido entre el origen "las 12 en punto" y el punto de detención del segundero. Dicha longitud es medida siguiendo el sentido $\curvearrowright$.

c. Evidentemente, los valores que puede asumir X están todos en el intervalo $0 \leq x < 1$ (al origen corresponde $x = 0$).
Entonces evidentemente será:

$$F^X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

d. Se define una distribución de probabilidad sobre E^X tal que:

$$P\begin{pmatrix} \text{Segundero se detenga sobre un} \\ \text{arco cualquiera de longitud } \lambda \end{pmatrix} = \lambda$$

e. Entonces, dado un punto de la circunferencia cuya distancia al origen sea x, siendo $0 \leq x < 1$ se tiene que:

$$F^X(x) = P(X \leq x) = P\begin{pmatrix} \text{Segundero se detenga sobre el} \\ \text{arco } 0 \frown x \text{ cuya longitud es x} \end{pmatrix} = x \qquad \text{para } 0 \leq x < 1$$

f. De todo lo antedicho surge la F. de D. graficada en la figura VAU V.b

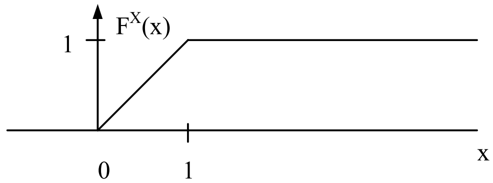

Fig. VAU V.b

VAU V.3

a. Supóngase que se elija un punto de la esfera de un reloj de 1 m de circunferencia de la siguiente manera:
Se tira una moneda. Si sale cara se elige el punto "6" de la esfera. Si sale ceca se da al reloj unas cuantas vueltas de cuerda y se elige el punto en que se detiene el segundero.

b. Asóciese a este experimento una variable X correspondiente a la longitud del arco de circunferencia comprendido entre el origen "las 12 en punto" y el punto elegido. Dicha longitud es medida siguiendo el sentido ↷.

c. Ver **c.** de VAU V.2.

d. Cualquiera sea la distribución que posteriormente se elija se tiene que para $0 \le x < 1$ será:

$$\left.\begin{aligned} P(X \le x) &= P[X \le x \cap (\text{Cara} \cup \text{Ceca})] = P[(X \le x \cap \text{Cara}) \cup (X \le x \cap \text{Ceca})] = \\ &= P(X \le x \cap \text{Cara}) + P(X \le x \cap \text{Ceca}) = \\ &= P(X \le x/\text{Cara})\, P(\text{Cara}) + P(X \le x/\text{Ceca})\, P(\text{Ceca}) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

e. Como primera medida se establece que:

$$P(\text{Cara}) = P(\text{Ceca}) = \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{[2]}$$

f. Si salió cara el punto elegido es el "6" de la esfera, cuya distancia al origen es ½. Por lo tanto, si salió cara la variable X asumirá inexorablemente el valor $X = \frac{1}{2}$.
Entonces, si salió cara:

1º. Sea un $x < \frac{1}{2}$. Como X asume el valor ½, nunca asumirá un valor menor o igual que dicho x. Entonces:

$$P(X \le x \,/\, \text{Cara}) = 0 \qquad \text{para } 0 \le x < \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{[3]}$$

2º. Sea un $x \ge \frac{1}{2}$. Como X asume el valor ½, asumirá siempre un valor menor o igual que dicho x. Entonces:

$$P(X \le x \,/\, \text{Cara}) = 1 \qquad \text{para } \tfrac{1}{2} \le x < 1 \qquad \textbf{[4]}$$

g. Si salió ceca, el punto elegido corresponde al lugar de detención del segundero cuando al reloj se le dan unas cuantas vueltas de cuerda. Es decir que se cae en caso tratado en VAU V.2. Entonces será:

$$P(X \le x \,/\, \text{Ceca}) = x \qquad \text{para } 0 \le x < 1 \qquad \textbf{[5]}$$

h. Por lo indicado en **c.** y en **[1]**, **[2]**, **[3]**, **[4]** y **[5]** resulta que:

$$F^X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot x = x/2 & \text{para } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{2} + x/2 & \text{para } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

Esta F. de D. está graficada en la figura VAU V.c.

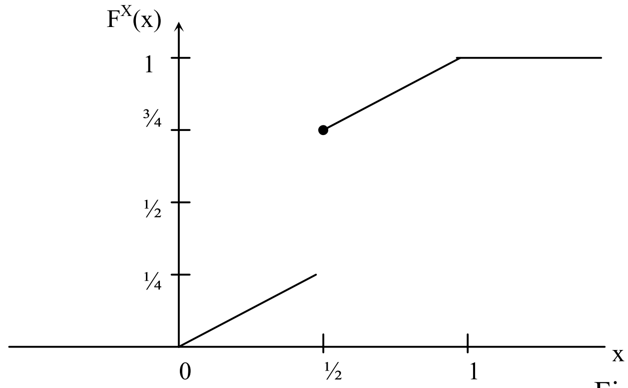

Fig. VAU V.c

VAU VI

Distribuciones discretas

a. Se dirá que una distribución $D_E{}^X$ efectuada sobre E^X es <u>discreta</u> cuando la variable X asociada a dicha distribución solo puede asumir una cantidad finita o infinidad numerable de valores para los cuales sea $P(X = x) > 0$, debiendo además ser igual a 1 la suma de todas esas probabilidades.
Es decir que debe ser

$$\sum_{\forall x_i \,/\, P(X=x_i)>0} P(X = x_i) = 1$$

La variable X será llamada <u>discreta</u>

b. Un ejemplo típico de distribución discreta es el caso presentado en VAU V.1. Allí, solo cuando la variable X asume uno de los valores 0, 1, 2, 3 ó 4 se obtiene una probabilidad no nula. Además como la suma de las probabilidades correspondientes es igual a 1, se tiene que en efecto se está tratando con una distribución discreta.

c. Se estudiará ahora la idiosincrasia de las F. de D. de las variables discretas.
Considérese de nuevo el experimento descripto en VAU V.1. Sea un número cualquiera, por ejemplo 3,2. Evidentemente

$$P(X \leq 3{,}2) = P(X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2 \cup X = 3)$$

ya que 0, 1, 2 y 3 son <u>todos</u> los valores menores o iguales que 3,2 que <u>no</u> tienen una probabilidad nula de ser asumidos por la variable.
Entonces:

$$P(X \leq 3{,}2) = P(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \sum_{x_i \leq 3{,}2 \;\cap\; x_i \,/\, P(X=x_i)>0} P(X = x_i)$$

En general:

$$F^X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x \;\cap\; x_i \,/\, P(X=x_i)>0} P(X = x_i) \qquad \textbf{[2]}$$

y entonces:

Ver **[8]** de VAU IV

$$F^X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x \;\cap\; x_i \,/\, P(X=x_i)>0} P(X = x_i) =$$

$$= \sum_{x_i \le x \,\cap\, x \,/\, P(X=x_i)>0} \left[F^X(x_i) - F^X(x_i - 0) \right] \qquad \textbf{[3]}$$

d. Ejemplo.
Sea:

$$P(X = 2^i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \quad , \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Ver figura VAU VI.a.

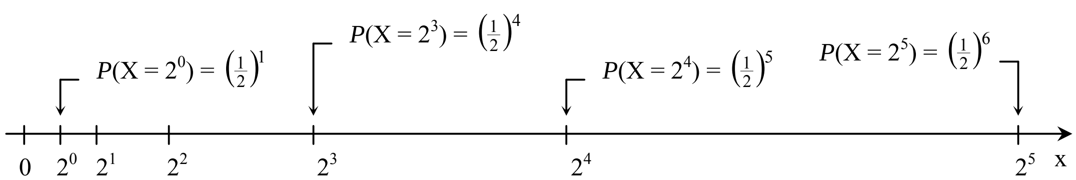

Fig. VAU VI.a

Notar lo siguiente:

1º. X puede asumir una infinidad numerable de valores en este caso.

2º. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = 1$ (serie geométrica) se tiene que la distribución considerada es discreta.

Aplicando **[2]** se obtiene.

$$P(X \le 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7/8 \, ; \qquad P(X \le 15) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15/16$$

Etc.
La F. de D. de esta variable está graficada (hasta X = 32) en la figura VAU VI.b.

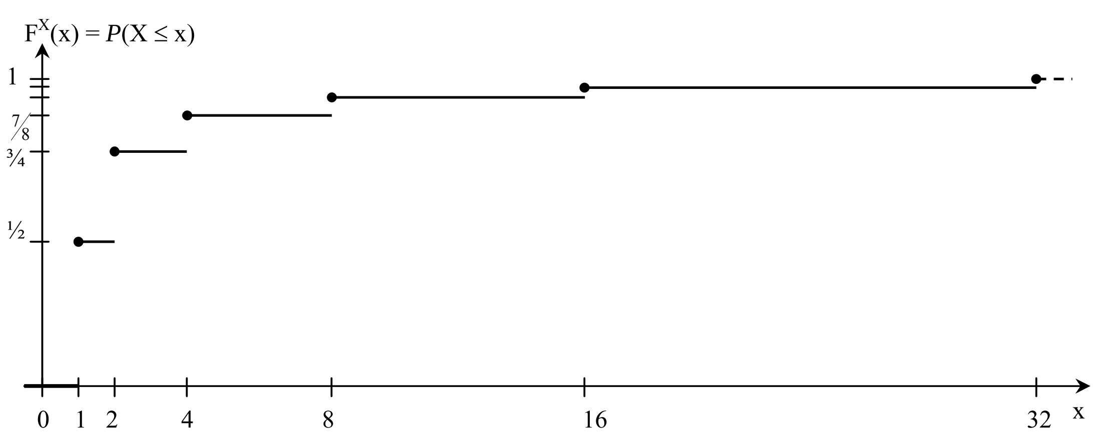

Fig. VAU VI.b

e. Toda F. de D. $F^X(x)$ de una variable discreta X es discontinua y aumenta “de a saltos” en cada punto x en el cual es $P(X = x) > 0$, siendo $P(X = x) = F^X(x) - F^X(x - 0)$ la magnitud del salto correspondiente. Entre dos valores consecutivos de x para los cuales sea $P(X = x) > 0$, la F. de D. será constante, tomando así el aspecto de “escalera” ilustrado en las figuras VAU V.a y VAU VI.b.

VAU VII

<u>Distribuciones continuas</u>

a. Se dirá que una distribución D_{E^X} efectuada sobre E^X es <u>continua</u> cuando exista una función $f^X(x) \geq 0 \;\; \forall$ x tal que siendo X la variable asociada a la distribución se tenga que: **[1]**

$$F^X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f^X(t)dt$$

(más sobre la función $f^X(x)$ en **b.**).

Por lo indicado en **d.** de VAU IV evidentemente debe ser:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^X(t)dt = F^X(\infty) = 1$$

La variable aleatoria y la F. de D. asociadas a una de estas distribuciones serán llamadas <u>continuas</u>.

b. Dada una $F^X(x)$ continua, existen varias $f^X(x)$ tales que para todas ellas es $F^X(x) = \int_{-\infty}^{x} f^X(t)dt$. Ver ejemplos en la figura VAU VII.a.

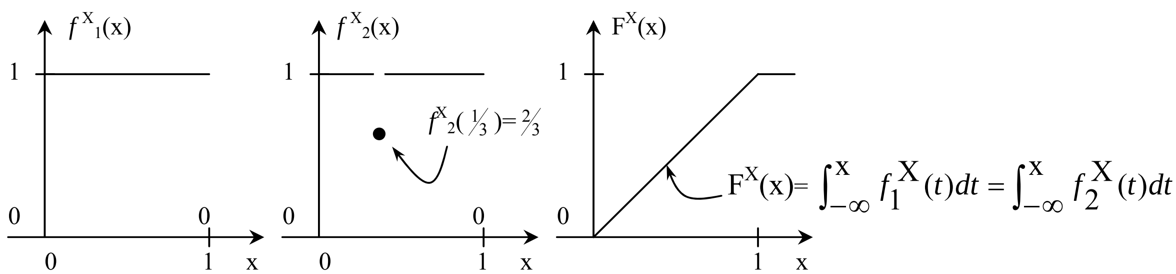

Fig. VAU VII.a

Se establece que entre todas las posibles $f^X(x)$ se elegirá a aquella que presente un mínimo de discontinuidades.

c. Es evidente que donde $F^X(x)$ sea diferenciable se tendrá que:

$$\frac{d\,F^X(x)}{dx} = f^X(x) \qquad \textbf{[2]}$$

d. Como evidentemente en el caso de una distribución continua $F^X(x)$ es uniformemente continua se tiene que:

$$F^X(x) = F^X(x-0) \qquad \textbf{[3]}$$

lo que implica que:

$$P(X = x) = F^X(x) - F^X(x-0) = 0 \quad , \quad \forall\, x \qquad \textbf{[4]}$$

Es decir que en el caso de una distribución continua todo resultado tiene "a priori" una probabilidad nula de aparecer.

e. Se tiene que en el caso de una distribución continua:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} f^X(t)dt = \int_{-\infty}^{x_2} f^X(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f^X(t)dt = \\
&\qquad\qquad\qquad \text{Por ser } F^X(x) \text{ uniformemente continua} \\
&= F^X(x_2) - F^X(x_1) = F^X(x_2\text{-}0) - F^X(x_1) = F^X(x_2) - F^X(x_1\text{-}0) = F^X(x_2\text{-}0) - F^X(x_1\text{-}0) = \\
&= P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2)
\end{aligned}\right\} \textbf{[5]}$$

f. Un ejemplo de distribución continua es el considerado en VAU V.2.

g. Se hace notar que existen distribuciones que no son ni discretas ni continuas. Ver VAU V.3.

VAU VIII

<u>Función de probabilidad (f. de p.)</u>

Dada una variable X cualquiera y una distribución $D_E X$, se llama función de probabilidad de la variable a la función:

$$p(x) = P(X = x) = F^X(x) - F^X(x-0) \qquad \textbf{[1]}$$

De esta definición surge que:

1º. $p(x) = F^X(x) - F^X(x-0) > 0$ donde $F^X(x)$ sea discontinua.

2º. $p(x) = F^X(x) - F^X(x-0) = 0$ donde $F^X(x)$ sea continua.

3º. $p(x) = F^X(x) - F^X(x-0) \equiv 0$ si X es una variable continua.

Esto último indica que la función de probabilidad es inoperante en el caso de una variable continua.

Como ejemplo, a la variable X cuya F. de D. está indicada en la figura VAU V.a corresponde la f. de p. de la figura VAU VIII.a.

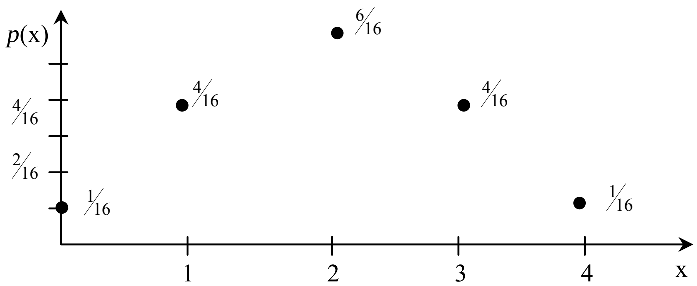

Fig. VAU VIII.a

VAU IX

<u>Función de densidad (f. de d.)</u>

a. Intuitivamente, efectuar una distribución de probabilidad D_{E^X} sobre un espacio muestral $E^X = \{-\infty < X < \infty\}$ equivale a repartir una "masa de probabilidad" igual a 1 a lo largo de un eje real.
En el caso de que esta masa resulte totalmente concentrada en una cantidad finita o infinidad numerable de puntos, la distribución de la masa estará completamente especificada por una f . de p., y la variable correspondiente será discreta.
Considérese ahora el caso en que la masa esté repartida a lo largo del eje real según una cierta ley que determine que no existan puntos de concentración en los cuales se acumule una masa medible por un número cualquiera (por chico que sea). Evidentemente, en este caso una repartición de la masa a lo largo del eje real solo puede ser descripta indicando la <u>densidad</u> de masa correspondiente a cada punto.
A la función que indica la densidad de probabilidad en cada punto se la llamará <u>función de densidad</u> (f. de d.).
Evidentemente, esta función de densidad solo tendrá vigencia en el caso de distribuciones continuas. En el caso de distribuciones discretas una f. de d. tomaría valores infinitos en unos cuantos puntos aislados, siendo nula en todo el resto del eje real.

b. Dada una variable aleatoria continua X cuya F. de D. es $F^X(x)$ se tiene que (ver **c.** de VAU VII):
<u>Donde $F^X(x)$ sea diferenciable</u>:

Ver **[5]** de VAU VII

$$\left.\begin{aligned} f^X(x) &= \frac{dF^X(x)}{dx} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F^X(x+h) - F^X(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(x < X \le x+h)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{P(x \le X \le x+h)}{h} = \text{Densidad de la probabilidad en x} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[1]}$$

Es por este motivo que a la función $f^X(x)$ que figura en **[1]** de VAU VII por extensión (y con no mucha propiedad) también se la llama función de densidad.

c. Ejemplos de funciones de densidad figuran en la figura VAU IX.a.

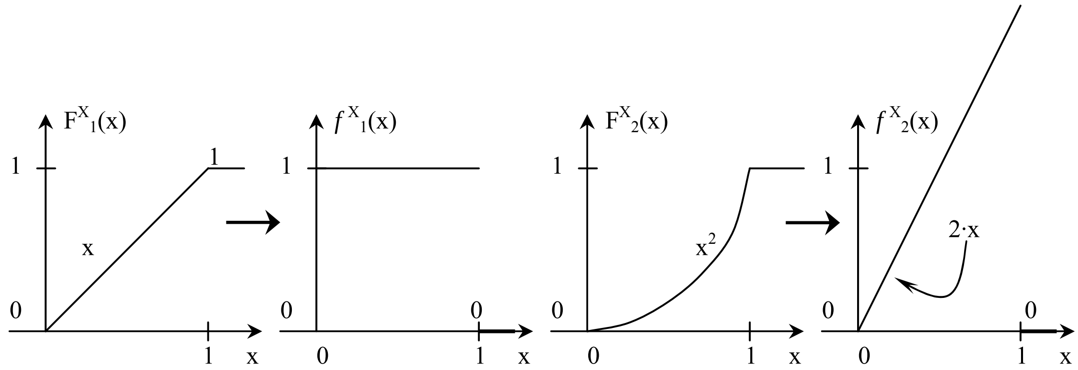

Fig. VAU IX.a

VAU X

<u>Cambio de variable aleatoria</u>

VAU X.1

a. Sea un experimento aleatorio al cual se asocia una variable X.
Sea:

$$Y = \varphi(X) \qquad \textbf{[1]}$$

donde <u>φ es una función uniforme y definida para todo valor de X</u>.

Al realizar el experimento correspondiente, la variable X asume un cierto valor aleatorio, y como la relación **[1]** determina que a cada valor que pueda asumir X corresponde un valor de Y, se tiene entonces que esta Y no es ni mas ni menos que otra variable aleatoria asociada al mismo experimento.

b. Sea el caso de la función Y = φ(X) indicado en la figura VAU X.a.

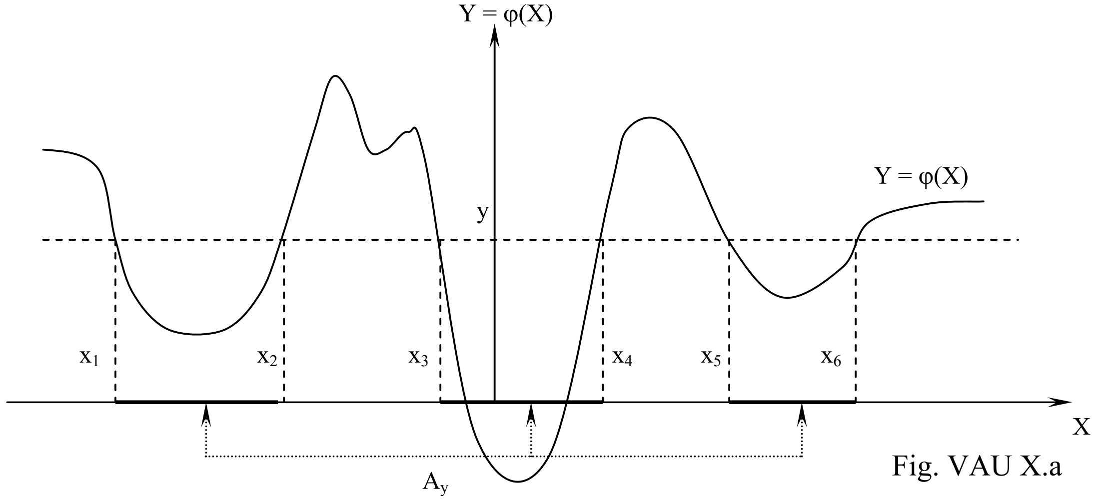

Fig. VAU X.a

Sea y un número cualquiera. Póngase:

$$A_y = \{\text{Valores x tales que } \varphi(x) \le y\} = \{x/\varphi(x) \le y\} \qquad \textbf{[2]}$$

En el caso de la función $\varphi(x)$ indicada en la figura VAU X.a, y para el número "y" allí considerado, el conjunto A_y estará compuesto por las zonas del eje X indicadas con trazo grueso. Analíticamente:

$$A_y = [x_1 , x_2] \cup [x_3 , x_4] \cup [x_5 , x_6] \qquad \textbf{[3]}$$

y evidentemente:

Si Y asume un valor menor o igual que "y", entonces X habrá asumido algún valor perteneciente a A_y.

y entonces:

$$F^Y(y) = P(Y \le y) = P(X \in A_y) = P(X \in x/\varphi(x) \le y) \qquad \textbf{[4]}$$

resultando así que dado un y cualquiera puede conocerse el valor de $F^Y(y)$ ya que la F. de D. $F^X(x)$ determina el valor de $P(X \in A_y)$.
Así, en el ejemplo que se viene desarrollando:

$$\left.\begin{aligned} F^Y(y) &= P(x \in A_y) = P[(x_1 \le X \le x_2) \cup (x_3 \le X \le x_4) \cup (x_5 \le X \le x_6)] = \\ &= P(x_1 \le X \le x_2) + P(x_3 \le X \le x_4) + P(x_5 \le X \le x_6) = \\ &= [F^X(x_2) - F^X(x_1 - 0)] + [F^X(x_4) - F^X(x_3 - 0)] + [F^X(x_6) - F^X(x_5 - 0)] \end{aligned}\right\} \textbf{[5]}$$

(ver **[9]** de VAU IV)

c. Volviendo al caso general, como el número "**y"** considerado era arbitrario, se tiene que por el procedimiento indicado puede hallarse el valor de la F. de D. $F^Y(y)$ para cualquier valor de la variable independiente y, quedando así $F^Y(y)$ completamente determinada.

VAU X.2

Sea por ejemplo (ver figura VAU X.b):

$$Y = arc\ tg\ X \quad ; \qquad \text{siendo } -\frac{\pi}{2} < Y < \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{[6]}$$

$$F^X(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \le 0 \\ x^3 & \text{para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{para } x \ge 1 \end{cases} \qquad \textbf{[7]}$$

Entonces:

Por **[7]**

$$F^Y(y) = P(Y \le y) = P(arc\ tg\ X \le y) = P(X \le tg\ y) = F^X(tg\ y) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } tg\ y \le 0 & \text{, es decir para } y \le 0 \\ tg^3 y & \text{para } 0 < tg\ y < 1 & \text{, es decir para } 0 < y < \pi/4 \\ 1 & \text{para } tg\ y \ge 1 & \text{, es decir para } y \ge \pi/4 \end{cases}$$

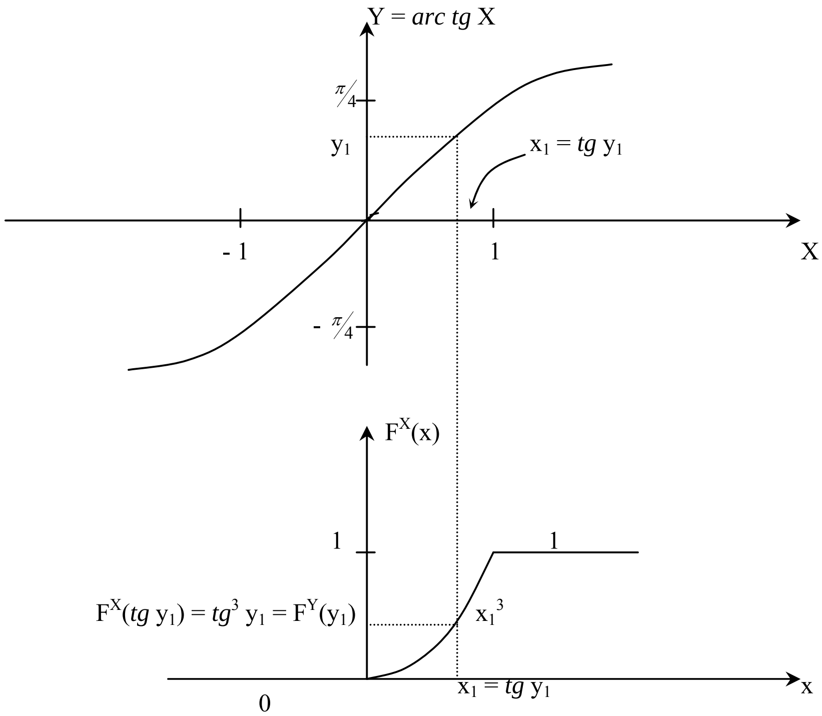

Fig. VAU X.b

VAU XI

Valor medio de una variable aleatoria

VAU XI.1

a. Se define:

Para una variable discreta:

$$m_X = \sum_{\forall x_i \,/\, P(X_i = x_i) > 0} x_i\ P(X = x_i) \qquad \textbf{[1]}$$

Para una variable continua:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f^X(x)\, dx \qquad \textbf{[2]}$$

b. Un significado físico de m_X puede ser el siguiente:

Tal como se sugirió en VAU IX, efectuar una distribución de probabilidad D_{E^X} sobre un espacio muestral $E^X = \{-\infty < x < \infty\}$ equivale a repartir una "masa de probabilidad" igual a 1 a lo largo de un eje real.

c. En el caso de que la distribución sea discreta, la masa quedará concentrada en una cantidad finita o infinidad numerable de puntos (ver figura VAU XI.a).

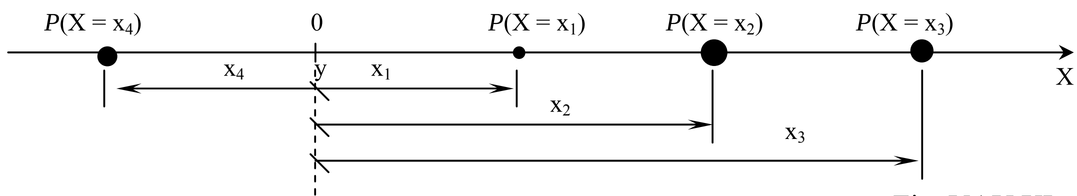

Fig. VAU XI.a

Evidentemente, la coordenada del baricentro de este sistema de masas (cuya suma es igual a 1) será m_X.

d. En el caso de que la variable sea continua, la masa quedará repartida sobre E^X sin que existan puntos de concentración en los cuales se acumule una masa medible por un número positivo cualquiera.

En este caso, la función de densidad $f^X(x)$ indica la densidad de la masa en cada punto del eje. Igual que en el caso anterior (ver figura VAU XI.b) m_X será también la coordenada del baricentro de la masa repartida.

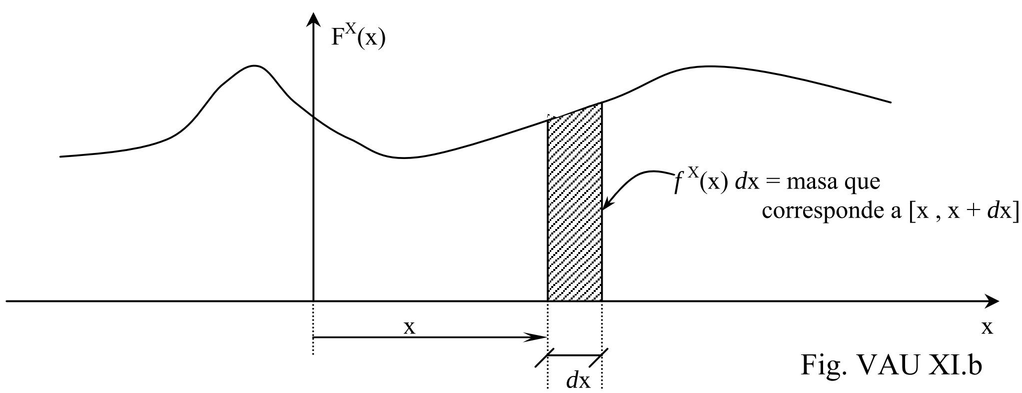

Fig. VAU XI.b

e. Se hace constar que existen F. de D. tales que el valor medio de la variable correspondiente es infinito o no existe.

Por ejemplo sea una variable X tal que:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,|x|} & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases} \qquad ; S = \{(-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, \ldots\}$$

Entonces será:

$$m_X = \sum_{\forall x \in S} xP(X = x) = 1\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + (-8)\frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots$$

resultando así que en este caso m_X no existe.

VAU XI.2

Ejemplo:

a. Sea X la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de tiros de moneda necesarios para sacar una primera cara.
Se pide hallar el valor medio de dicha variable.

b. Si C_i es el suceso consistente en sacar una cara en el tiro *i*, y por lo tanto $\overline{C_i}$ es el suceso consistente en sacar una ceca en dicho tiro, se tiene que:

$P(X = n) = P(\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \ldots \cap \overline{C}_{n-1} \cap C_n)$ (1ª cara en tiro *n*)

Como en una sucesión de tiros de moneda el resultado de un cierto tiro no depende para nada del resultado obtenido en otros tiros se tiene que:

$$P(X = n) = P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)\ldots P(\overline{C}_{n-1})P(C_n)$$

Estableciendo que:

$$P(\overline{C}_1) = P(\overline{C}_2) = \ldots = P(\overline{C}_{n-1}) = P(C_n) = ½$$

resulta:

$$P(X = n) = (½)^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (½)^n}_{\text{Serie geométrica de razón ½}} = 1$$

c. Se tiene que:

$$m_X = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} - \underbrace{\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}^{=1}}_{\text{Serie geométrica de razón ½}} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} - 1 \underset{\text{Restando y sumando 1}}{=} -1 + 2\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}\right] - 1 = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} - 1 =$$

Tomando $n' = n + 1$

$$= -1 + 2\sum_{n'=1}^{\infty} \frac{n'}{2^{n'}} - 1 = -2 + 2\sum_{n'=1}^{\infty} \frac{n'}{2^{n'}} = -2 + 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}}_{m_X} = -2 + 2\, m_X$$

Resumiendo:

$$m_X = -2 + 2\, m_X$$

y por lo tanto:

$$m_X = 2$$

VAU XI.3

Ejemplo:
Experimentalmente se ha comprobado que si al experimento aleatorio consistente en medir la duración de una conversación telefónica se le asocia una variable aleatoria T, para obtener un "reflejo fiel" de la realidad, a dicha variable debe asociarse la F. de D.:

$$F^T(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \le 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Se pide hallar el valor medio de esta variable T.

Para empezar (ver **[2]** de VAU VII):

$$f^T(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \alpha\, e^{-\alpha t} & \text{para } t \ge 0 \end{cases}$$

y entonces:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f^T(t)\, dt = \int_0^{\infty} t\, \alpha\, e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

VAU XI.4

a. Se demostrará a continuación que:

$$m_{aX+b} = a\, m_X + b \text{ , siendo } a \text{ y } b \text{ constantes} \qquad \textbf{[3]}$$

b. Supóngase que X sea una variable discreta.
Esto implica que cuando X asuma un valor x_i, entonces aX + b asumirá el valor $a\,x_i + b$.
Por lo tanto:

$$m_{aX+b} = \sum_{\forall a x_i + b \,/\, P(aX+b = a x_i + b) > 0} (a x_i + b) P(aX + b = a x_i + b) = \sum_{\forall x_i \,/\, P(X = x_i) > 0} (a x_i + b) P(X = x_i) =$$

$$= a \cdot \underbrace{\sum_{\forall x_i \,/\, P(X = x_i) > 0} x_i P(X = x_i)}_{= m_X} + b \cdot \underbrace{\sum_{\forall x_i \,/\, P(X = x_i) > 0} P(X = x_i)}_{= 1} = a\; m_X + b$$

quedando así probado lo indicado en **[3]** para el caso de una variable discreta.

c. Supóngase ahora que X sea una variable continua.
Póngase:

$$Y = a\,X + b$$

Entonces, si $a > 0$:

$$F^{Y}(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f^{X}(t)dt \underset{\text{Haciendo el cambio de variables } t = \frac{v-b}{a}}{=} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{a} f^{X}\left(\frac{v-b}{a}\right)dv$$

resultando entonces que:

$$f^{Y}(y) = \frac{1}{a} f^{X}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

y por lo tanto:

$$m_{a\,X+b} = m_{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f^{Y}(y)\, dy = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f^{X}\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \underset{\text{Haciendo el cambio de variables } y = a\,x + b}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (a\,x + b)\, f^{X}(x)\, dx = a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f^{X}(x)\, dx}_{= m_X} + b\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^{X}(x)\, dx}_{= 1} = a\, m_X + b$$

resultando así también válida la expresión **[3]** para el caso de una variable continua y $a > 0$.
La demostración de la validez de **[3]** cuando la variable X sea continua y $a < 0$ se deja a título de ejercicio.

c. Por **[3]** se tiene que:

$$m_{a\,X} = m_{a\,X+0} = a\, m_X + 0 = a\, m_X \qquad \textbf{[4]}$$

$$m_{b} = m_{0\,X+b} = 0\, m_X + b = b \qquad \textbf{[5]}$$

VAU XII

Varianza y desviación típica de una variable aleatoria

VAU XII.1

a. Se define:
Para una variable discreta:

$$\sigma_X^2 = \text{Varianza de X} = \sum_{\forall x_i \,/\, P(X=x_i)} (x - m_X)^2 P(X = x_i) \qquad \textbf{[1]}$$

Para una variable continua:

$$\sigma^2_X = \text{Varianza de X} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f^X(x)\, dx \qquad \textbf{[2]}$$

En ambos casos:

$$\sigma_X = \text{Desviación típica de X} = \text{Raíz cuadrada positiva de } \sigma^2_X \qquad \textbf{[3]}$$

Observación:
Pueden existir distribuciones tales que la varianza de la variable aleatoria correspondiente sea infinita. Se dirá que en dichos casos la varianza no existe.

b. Sea el caso de una variable discreta. Al igual que en VAU XI.1 **b.**, puede imaginarse una distribución de probabilidad D_{E^X} sobre un espacio muestral E^X como una repartición de una "masa de probabilidad" igual a 1 a lo largo de un eje real (ver figura VAU XII.a).

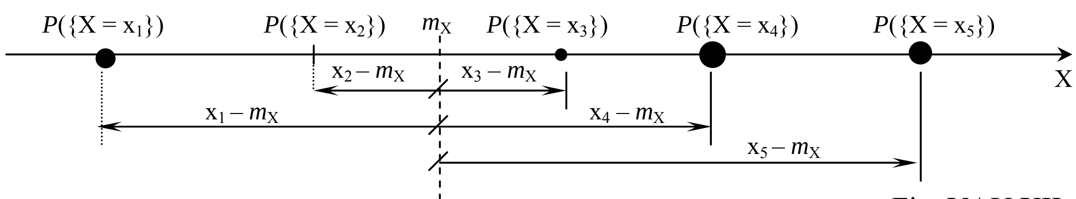

Fig. VAU XII.a

Teniendo en cuenta a **[1]** resulta entonces que σ^2_X es la suma de los productos de cada "masa" del sistema por el cuadrado de su distancia a m_X, baricentro del sistema, teniéndose así que σ^2_X <u>es el momento de inercia del sistema de masas</u> con respecto a m_X.
A exactamente la misma conclusión puede llegarse para el caso en que la variable sea continua, es decir cuando la masa esté repartida sobre el eje real sin que haya puntos con concentración de masas.
La varianza de una variable aleatoria mide la dispersión de la probabilidad asociada a la variable. <u>A mayor dispersión, mayor varianza</u>.
Notar al respecto que para que sea $\sigma^2_X = 0$ es necesario que toda la "masa" esté concentrada en un único punto, es decir que la variable pueda asumir un único valor X = a. Evidentemente en este caso será:

$$P(X = a) = 1 \qquad ; \qquad m_X = a$$

VAU XII.2

Por un procedimiento muy similar al empleado en VAU XI.4 puede demostrarse que:

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\, \sigma^2_X \qquad \text{(X discreta o continua)} \qquad \textbf{[4]}$$

VAU XII.3

a. Se demostrará que:

$$\sigma_X^2 = \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i^2 P(X=x_i) - m_X^2 \qquad \text{(X discreta)} \qquad \textbf{[5]}$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - m_X^2 \qquad \text{(X continua)} \qquad \textbf{[6]}$$

b. Sea el caso en que X sea discreta.

$$\sigma_X^2 = \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} (x_i - m_X)^2 P(X=x_i) = \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} (x_i^2 - 2\, x_i\, m_X + m_X^2)\, P(X=x_i) =$$

$$= \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i^2 P(X=x_i) - 2\, m_X \underbrace{\sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i P(X=x_i)}_{=m_X} + m_X^2 \underbrace{\sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} P(X=x_i)}_{=1} =$$

$$= \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i^2 P(X=x_i) - 2\, m_X^2 + m_X^2 = \sum_{\forall x_i / P(X=x_i)>0} x_i^2 P(X=x_i) - m_X^2$$

Con lo que queda probado lo indicado en **[5]**.

c. Sea el caso en que X sea continua.

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\, x\, m_X + m_X^2)\, f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - 2\, m_X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx}_{=m_X} + m_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx}_{=1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - 2\, m_X^2 + m_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - m_X^2$$

Con lo que queda probado lo indicado en **[6]**.

VAU XII.4

Ejemplo:
Sea el mismo caso considerado en VAU XI.2. Se pide hallar la varianza de la variable X.
Según deducido en VAU XI.2:

$$P(X=n) = (½)^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 \; ; \quad m_X = 2 \qquad \textbf{[7]}$$

Por otra parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\underset{\text{Sumando y restando } 2n+1}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-2\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{=1 \text{ (Serie geométrica} \\ \text{de razón } ½\text{)}}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)}_{=m_X=2}-1=$$

$$\underset{\text{Restando y sumando 1}}{=}-1+2\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right]-2\cdot 2-1=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-6\underset{\text{Tomando } n'=n+1}{=}2\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{n'^2}{2^{n'}}-6=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}-6$$

Resumiendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}-6$$

y por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2P(X=n)=6 \qquad \textbf{[8]}$$

y entonces por **[5]**, **[7]** y **[8]** resulta:

$$\sigma_X^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^2P(X=n)-m_X^2=6-2^2=2$$

VAU XII.4

Ejemplo:

a. Sea el mismo caso considerado en VAU XI.3. Se pide hallar la varianza de la variable T. Según deducido en VAU XI.3:

$$f^{T}(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<0\\ \alpha\, e^{-\alpha t} & \text{para } t\geq 0\end{cases} \qquad ; \qquad m_T=\frac{1}{\alpha}$$

Entonces, por **[6]**:

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f^T(t)\, dt - m_T^2 = \int_0^{\infty} t^2 \alpha e^{-\alpha t} dt - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Resumiendo:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

y por lo tanto en este caso es:

$$\sigma_T = m_T = \frac{1}{\alpha}$$

b. Observación:
La distribución considerada en este ejemplo y en VAU XI.3 recibe el nombre de "Distribución exponencial negativa".

VAU XIII

Teorema de Tchebycheff

a. Sea una variable aleatoria X tal que tenga un valor medio m finito y una varianza σ^2 finita.
Sea k un número positivo cualquiera.
Se demostrará que:

$$P(|X - m| > k\,\sigma) < \frac{1}{k^2} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Supóngase que X sea una variable continua. Entonces:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f^X(x)\, dx > \int_{-\infty}^{m - k\sigma} (x - m)^2 f^X(x)\, dx + \int_{m + k\sigma}^{\infty} (x - m)^2 f^X(x)\, dx \qquad \textbf{[2]}$$

Se tiene que:

$$x \le m - k\sigma \Rightarrow (x - m) \le -k\sigma \Rightarrow -(x - m) \ge k\sigma \Rightarrow (x - m)^2 \ge (k\sigma)^2 \qquad \textbf{[3]}$$

$$x \ge m + k\sigma \Rightarrow (x - m) \ge k\sigma \Rightarrow (x - m)^2 \ge (k\sigma)^2 \qquad \textbf{[4]}$$

Entonces por **[2]**, **[3]** y **[4]** resulta que:

$$\sigma^2 > (k\sigma)^2 \left[\int_{-\infty}^{m - k\sigma} f^X(x)\, dx + \int_{m + k\sigma}^{\infty} f^X(x)\, dx \right] = k^2\, \sigma^2\, P(|X - m| > k\,\sigma)$$

Resultando así que:

$$P(|X - m| > k\,\sigma) < \frac{1}{k^2}$$

c. Supóngase que X sea una variable discreta. Entonces:

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2 = \sum_{x_i / P(X=x_i)>0} (x_i - m)^2 P(X = x_i) > & \sum_{x_i / P(X=x_i)>0 \,\cap\, x_i \le m-k\sigma} (x_i - x)^2 \quad P(X = x_i) + \\ + & \sum_{x_i / P(X=x_i)>0 \,\cap\, x_i \ge m+k\sigma} (x_i - x)^2 \quad P(X = x_i)\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[5]}$$

Como las expresiones **[3]** y **[4]** son válidas tanto para variables discretas como para variables continuas se tiene que:

$$\sigma^2 > (k\,\sigma)^2 \left[\sum_{x_i / P(X=x_i)>0 \,\cap\, x_i \le m-k\sigma} P(X = x_i) \quad + \sum_{x_i / P(X=x_i) > 0 \;\cap\; x_i \ge m+k\sigma} P(X = x_i)\right] >$$

$$= (k\,\sigma)^2\, P(|X - m| > k\sigma)$$

resultando así que:

$$P(|X - m| > k\,\sigma) < \frac{1}{k^2}$$

d. La fórmula **[1]** es válida para todo tipo de variable y no solamente para las continuas y las discretas.
Lo demostrado es solo un caso particular del Teorema de Tchebycheff pero es solo lo que se necesitará mas adelante.
La importancia del Teorema de Tchebycheff reside en lo poco que se presupone acerca de la variable X.

APÉNDICES

A.VAU. I

Límites de algunos sucesiones específicas de conjuntos.

a. Para todo x* > x siempre puede elegirse un $h > 0$ (lo suficientemente chico), tal que x* no pertenezca a]x, x+h]. Lo anterior implica que: $\lim\limits_{h \to 0^+}]x, x+h] = \varnothing$, lo que también puede ser expresado como:

$$\lim_{h \to 0^+} (x < X \leq x + h) = \varnothing \qquad \textbf{[1]}$$

b. De igual manera puede probarse que:

$$\lim_{x \to -\infty} (X \leq x) = \varnothing \qquad \textbf{[2]}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (X \leq x) = E \qquad \textbf{[3]}$$

$$\lim_{h \to 0^+} (X \leq x - h) = (X < x) \qquad \textbf{[4]}$$

A.VAU. II

Límite de una sucesión no decreciente de conjuntos

a. Sea una sucesión de conjuntos tales que $A_{i-1} \subset A_i$, y $A_i \subset E, \forall\, i$.
Se demostrará que:

$$P(\lim_{i \to \infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i) \qquad \textbf{[1]}$$

b. Por ser $A_{i-1} \subset A_i \; \forall\, i$ se tiene que (ver fig. A.VAU II.a):

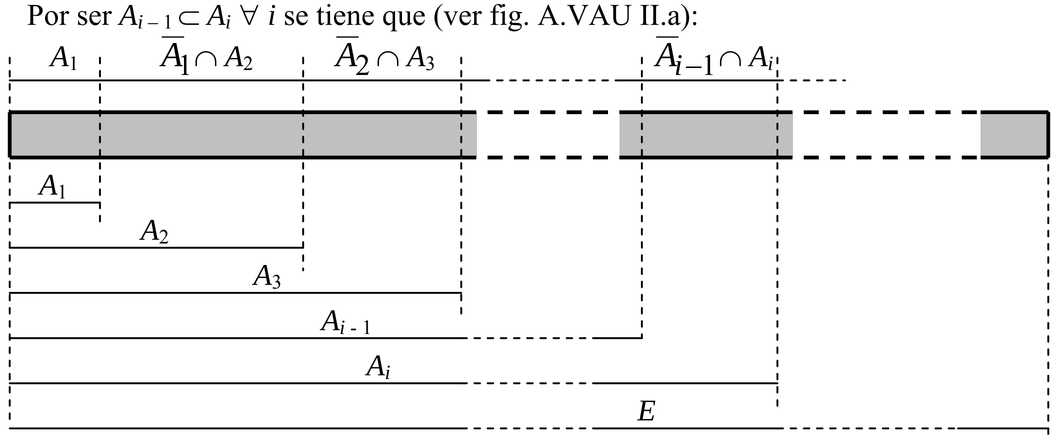

Fig. A.VAU II.a

1º. $A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{i-1} \cup A_i$ **[2]**

2º. $A_i = A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\overline{A}_{i-1} \cap A_i)$ **[3]**

y por lo tanto:

1º. $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{i-1} \cup A_i \cup \ldots$ **[4]**

2º. $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\overline{A}_{i-1} \cap A_i) \cup \ldots$ **[5]**

Como todos los conjuntos del 2º miembro de **[5]** son mutuamente excluyentes se tiene que:

$$P(\lim_{i\to\infty} A_i) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\overline{A}_{i-1} \cap A_i) + \ldots$$

$$= P(A_1) + \lim_{i\to\infty} \sum_{n=2}^{i} P(\overline{A}_{n-1} \cap A_n) = \lim_{i\to\infty} \left[P(A_1) + \sum_{n=2}^{i} P(\overline{A}_{n-1} \cap A_n) \right] =$$

$$= \lim_{i\to\infty} [\, P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\overline{A}_{i-1} \cap A_i)]$$

y como todos los sucesos A_1, $\overline{A}_1 \cap A_2$, $\overline{A}_2 \cap A_3$, **…,** $\overline{A}_{i-1} \cap A_i$ son mutuamente excluyentes se tiene que:

$$P(\lim_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P\,[\, A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\overline{A}_{i-1} \cap A_i)] \overset{\text{Por [3]}}{=} \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

Resumiendo:

$$P(\lim_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

tal como indicado en **[1]**.

A.VAU. III

Límite de una sucesión no creciente de conjuntos

a. Se probará que en una sucesión de conjuntos tal que $B_i \subset B_{i-1}$ se tiene que:

$$P\left(\lim_{i\to\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(B_i) \qquad \textbf{[1]}$$

b. Sea una sucesión de conjuntos tal que $B_i \subset B_{i-1}$.

Evidentemente:

$$\lim_{i\to\infty} B_i = B_1 \cap B_2 \cap$$

Entonces:

$$P(\overline{\lim_{i\to\infty} B_i}) = P(\overline{B_1 \cap B_2 \cap \quad}) = P(\overbrace{\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup}^{\text{Sucesión no decreciente de conjuntos}}\ ) = P(\lim_{i\to\infty} \overline{B}_i) = \lim_{i\to\infty} P(\overline{B}_i)$$

Ver **[4]** de A.VAU.II

Ver **[1]** de A.VAU.II

Resumiendo:

$$P(\overline{\lim_{i\to\infty} B_i}) = \lim_{i\to\infty} P(\overline{B}_i)$$

y entonces:

$$1 - P(\lim_{i\to\infty} B_i) = \lim_{i\to\infty} (1 - P(B_i)) = 1 - \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

Resultando así que:

$$P\left(\lim_{i\to\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

A.VAU. IV

Teorema

a. Se demostrará que:

$$\sigma_X^2 = m_{(X-m_X)^2} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Supóngase que X sea una variable discreta. Póngase:

$$Y = X^2 \qquad y = x^2 \qquad \textbf{[2]}$$

Se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} m_{X^2} = m_Y &= \sum_{\forall y_i / P(Y=y_i)>0} y_i P(Y=y_i) = \sum_{\forall x_i / P(X^2=x_i^2)>0} x_i^2 P(X^2 = x_i^2) = \\ &= \sum_{\forall x_i / P(X = x_i \cup X = -x_i) > 0} x_i^2 P(X = x_i \cup X = -x_i) = \sum_{\forall x_j / P(X = x_j) > 0} x_j^2 P(X = x_j) \end{aligned}\right\} \textbf{[3]}$$

x_j = Todo x_i tal que $P(X = x_i) > 0$ ó $P(X = -x_i) > 0$

Por otra parte:

$$\left.\begin{aligned} m_{(X-m_X)^2} &= m_{X^2-2m_X X+(m_X)^2} = m_{X^2} - 2m_X m_X + (m_X)^2 = m_{X^2} - (m_X)^2 = \\ &\underset{\text{Por [3]}}{=} \sum_{\forall x_j / P(X=x_j)>0} x_j^2 P(X=x_j) - (m_X)^2 \end{aligned}\right\} \textbf{[4]}$$

y como:

$$\sigma_X^2 = \sum_{\forall x_j / P(X=x_j)>0} (x_j - m_X)^2 P(X=x_j) =$$

$$= \sum_{\forall x_j / P(X=x_j)>0} x_j^2 P(X=x_j) - 2m_X \bullet \underbrace{\sum_{\forall x_j / P(X=x_j)>0} x_j P(X=x_j)}_{m_X} + (m_X)^2 =$$

$$= \sum_{\forall x_j / P(X=x_j)>0} x_j^2 P(X=x_j) - (m_X)^2 \underset{\text{Por [4]}}{=} m_{(X-m_X)^2}$$

Resumiendo:

$$\sigma_X^2 = m_{(X-m_X)^2}$$

Con lo cual **[1]** queda probado para el caso de una variable discreta.

c. Supóngase que X sea una variable continua. Póngase:

$$Y = X^2 \qquad\qquad y = x^2$$

Se tiene que:

$$F^Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 \text{ para } y < 0 \text{ ya que } X^2 \text{ es siempre no negativa} \\ P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F^X(\sqrt{y}) - F^X(-\sqrt{y}) \qquad \text{para } y \geq 0 \end{cases}$$

$$f^Y(y) = \frac{d\,F^Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0 & \text{para } y < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f^X(\sqrt{y}) + f^X(-\sqrt{y}) \right] & \text{para } y \geq 0 \end{cases}$$

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f^Y(y)\, dy = \underset{\uparrow \text{ Por ser } f^Y(y) = 0 \text{ para } y < 0}{\int_{0}^{\infty}} y\, f^Y(y)\, dy = \int_{0}^{\infty} x^2 [f^X(x) + f^X(-x)]\, \frac{1}{2x}\, 2x\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 f^X(x) dx + \underset{\uparrow \text{ Haciendo } z = -x \Rightarrow dx = -dz}{\int_0^{\infty} x^2 f^X(-x) dx} =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 f^X(x) dx - \int_0^{-\infty} z^2 f^X(z) dz = \int_0^{\infty} x^2 f^X(x) dx + \int_{-\infty}^{0} x^2 f^X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^X(x) dx$$

Resumiendo:

$$m_{X^2} = m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^X(x) dx \qquad \textbf{[5]}$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f^X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^X(x) dx - 2m_X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\ \ f^X(x) dx}_{m_X} + (m_X)^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^X(x) dx - m_X^2 \underset{\uparrow \text{ Por } \textbf{[5]}}{=} m_{X^2} - (m_X)^2 \end{aligned}\right\} \textbf{[6]}$$

y como:

$$m_{(X-m_X)^2} = m_{X^2 - 2m_X X + (m_X)^2} = m_{X^2} - 2m_X m_X + (m_X)^2 = m_{X^2} - (m_X)^2 \qquad \textbf{[7]}$$

por **[6]** y **[7]** resulta que:

$$\sigma_X^2 = m_{(X-m_X)^2}$$

Con lo cual **[1]** queda también probado para el caso de una variable continua.

Problemas sobre variables aleatorias unidimensionales

VAU 1 Definir la función de distribución (F. de D.) correspondientes a:
a) La cantidad de caras obtenidas al tirar dos veces una moneda
b) La cantidad de tiros de moneda que se efectúan hasta sacar cara.

VAU 2 Sea una variable aleatoria X tal que su valor medio sea 3 y su varianza sea nula. Indicar la F. de D. de dicha variable.

VAU 3 Sea:

$$f^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 \quad para \ \ \mathrm{t} < 0 \\ e^{-\mathrm{t}} \quad para \ \ \mathrm{t} \geq 0 \end{cases}$$

la función de densidad correspondiente a la duración de las comunicaciones telefónicas. Se pide:
a) Hallar la F. de D. $F^{T}(t)$
b) Hallar la probabilidad de que una cierta comunicación dure más de una unidad de tiempo
c) Hallar la probabilidad de que una comunicación de edad t dure más de una unidad de tiempo adicional
d) Hallar el valor medio y la varianza de la variable aleatoria T.

VAU 4 Una variable aleatoria X tiene una F. de D. $F^{X}(x)$.
Se pide hallar las F. de D. de las variables $Y = X^2$ y $Z = e^{X}$.

VAU 5 Se elige un número al azar entre 0 y 1.Sea X la variable aleatoria correspondiente a este experimento.
a) Hallar la F. de D. $F^{X}(x)$
b) Hallar la F. de D. de la variable $Y = e^{X}$.

VAU 6 Dada la F. de D. de una variable X correspondiente a la estatura de los ciudadanos argentinos de 18 años, indicar la probabilidad de que uno de esos ciudadanos mida más de 1,75; sabiendo que mide entre 1,60 y 1,80.

VAU 7 En un carrete de piolín de 100 m de largo hay un trozo de 1 m ubicado al azar que es defectuoso. Se pide indicar la probabilidad de que los 10 primeros metros sean totalmente sanos.

VAU 8 Supóngase que la vida en horas de un cierto circuito integrado sea tal que

$$f^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 \quad para \ \ \mathrm{t} \leq 0 \\ \dfrac{e^{-0{,}001\,\mathrm{t}}}{1000} \quad para \ \ \mathrm{t} > 0 \end{cases}$$

Indicar las probabilidades de que:
a) Un dispositivo con tres de dichos circuitos no tenga ningún inconveniente en las primeras 500 horas de servicio
b) Haya que sustituir los tres circuitos durante dicho período

VAU 9 El minutero de un reloj eléctrico se mueve de a saltos al fin de cada minuto. Hallar el valor medio y la varianza del error que se comete al mirar la hora en dicho reloj.

VAU 10 Una persona paga \$100 para participar en un juego en el cual la banca le paga 6 veces el cuadrado del número que saque en un tiro de dado. Calcular cual es a largo plazo, la ganancia de la banca por partido.

VAU 11 Un jugador apuesta \$1 al negro en una ruleta con 18 números negros, 18 colorados y el cero. Si pierde apuesta \$2 de nuevo al negro, y así sucesivamente, duplicando su apuesta hasta llegar a \$64, máximo permitido por la ruleta. Si gana en cualquier tiro, el jugador se va (ganando \$1). Hallar el valor medio de la ganancia en \$ del jugador.

VAU 12 Una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad continua con función de densidad:

$$f^{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathrm{x} < 0 \\ \dfrac{\mathrm{x}}{8} & \text{para } 0 \le \mathrm{x} \le 4 \\ 0 & \text{para } \mathrm{x} > 4 \end{cases}$$

Se pide calcular:

$$P(m_{\mathrm{X}} - 2\sigma_{\mathrm{X}} < \mathrm{X} \le m_{\mathrm{X}} + 2\sigma_{\mathrm{X}})$$

VAU 13 Si:

$$f^{\mathrm{X}}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathrm{x} < 0 \\ 3\,\mathrm{x}^2 & \text{para } 0 \le \mathrm{x} < 1 \\ 0 & \text{para } \mathrm{x} \ge 1 \end{cases}$$

Se pide hallar un número α tal que: $P(\mathrm{X} \le \alpha) = P(\mathrm{X} > \alpha)$